4　2次関数

基本問題

1　[**変化の割合，変域**]　次の問いに答えなさい。

(1)　y は x の2乗に比例し，$x=2$ のとき $y=12$ である。y を x の式で表せ。〈兵庫〉

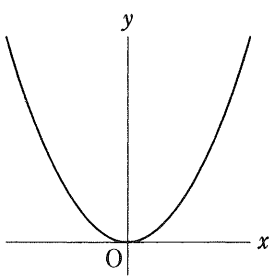
(2)　関数 $y=x^2$ について，x がある数 a から2増加すると y は16増加する。このとき，a の値を求めよ。〈岡山〉

(3)　関数 $y=ax^2$ で，x の値が1から3まで増加するときの変化の割合が12になった。このとき，a の値を求めよ。〈埼玉〉

(4)　関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ において，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 4$ のとき，y の変域を求めよ。〈京都〉

(5)　2つの関数 $y=ax^2$（a は定数，$a<0$）と $y=-4x+b$（b は定数）は，x の変域が $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域が同じになる。a，b の値を求めよ。〈愛知〉

2　[**放物線**]　右の図は，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフと，原点Oを示したものである。このグラフと x 軸に平行な直線との2つの交点をA，Bとし，点Aから x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点をCとする。ただし，点Aの x 座標は正である。このとき，次の問いに答えなさい。〈鹿児島〉



(1)　点Aの x 座標を2とするとき，点Bの座標を求めよ。

(2)　AB＋AC＝3になるとき，点Aの x 座標を求めよ。

要点チェック

1　(1)　y は x の2乗に比例するとき，$y=ax^2$ と表される。

(2)　y の増加量は，$(a+2)^2-a^2$ で表される。

(3)　変化の割合 $=\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$

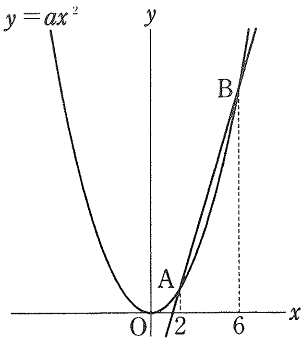
(4)　$x=0$ のとき y は最大，$x=4$ のとき y は最小となる。

(5)　$a<0$ ならば，$x=0$ のとき y は最大値0をとる。

2　(1)　放物線は y 軸について対称である。

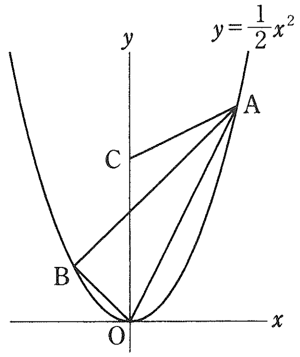
(2)　点Aの x 座標を a とするとき，AB＝$2a$ と表される。

3 ［**放物線と直線**］　右の図のように，関数 $y = ax^2$ のグラフ上に，x 座標がそれぞれ 2，6 となる 2 点 A，B をとる。直線 AB の傾きが 4 のとき，a の値を求めなさい。　〈宮城〉



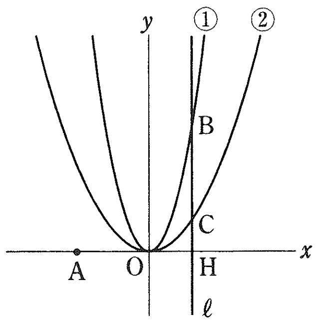
3　まず，A，B の y 座標を求める。
$y = ax^2$ に A，B の x 座標をそれぞれ代入し，a を使って表す。

4 ［**放物線と図形**］　図で，O は原点，A，B は関数 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点である。また，C は y 軸上の点で，その y 座標は正である。点 A，B の x 座標はそれぞれ 4，-2 である。△ABO の面積と△ACO の面積が等しいとき，点 C の座標を求めなさい。　〈愛知〉



4　等積変形を使う。
△ABO ＝△ACO のとき，AO//CB となる。

5 ［**2 つの放物線**］　右の図において，①は関数 $y = 2x^2$ のグラフ，②は関数 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフ，点 A の座標は $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ である。y 軸に平行な直線 ℓ を引き，①，②との交点をそれぞれ B，C，x 軸との交点を H とする。ただし，直線 ℓ は y 軸とは異なる。次の問いに答えなさい。　〈大分〉



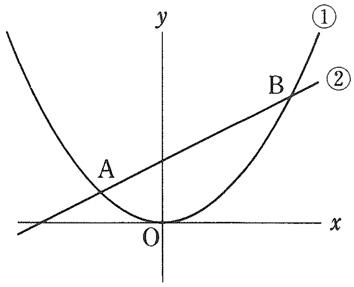
(1)　点 B の x 座標を $a(a > 0)$ とする。関数①について，x の値が 0 から a まで増加するときの変化の割合が 1 であるとき，a の値および直線 AB の式を求めよ。

(2)　直線 ℓ がどの位置にあっても BH ： CH の比はつねに一定の値となる。BH ： CH を求めよ。

5　(2)　B の x 座標を a として，B と C の y 座標をそれぞれ a を使って表してみる。

標準問題

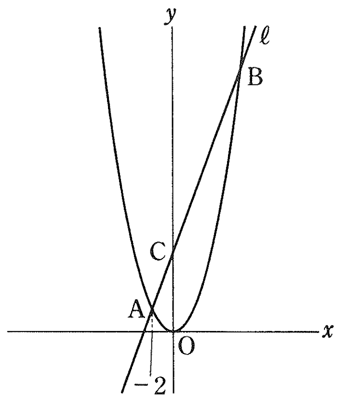
6　右の図において，放物線①は原点を頂点とし，点A$(-2,\ 1)$を通るグラフである。また，点Bは放物線①上の，x座標が4となる点であり，直線②は2点A，Bを通るグラフである。このとき，次の問いに答えなさい。〈愛媛〉



(1)　放物線①，直線②の式をそれぞれ求めよ。

(2)　放物線①と直線②で囲まれた図形の周上にあって，x座標，y座標がともに整数である点の個数を求めよ。

7　右の図で，曲線は，関数$y = ax^2$のグラフであり，直線ℓと2点A，Bで交わっている。また，点Cは直線ℓとy軸との交点である。点Aのx座標が-2，直線ℓの傾きが3であり，△AOCと△BOCの面積の比が1：3であるとき，次の問いに答えなさい。ただし，座標の1目もりは1cmとする。〈三重〉



(1)　2点A，Bのy座標を，それぞれaを用いて表せ。

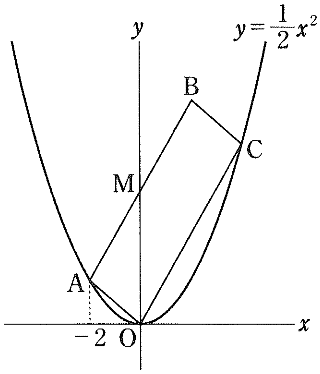
(2)　aの値を求めよ。

(3)　△AOBの面積を求めよ。

(4)　点Cを通り，△AOBの面積を2等分する直線の式を求めよ。

> **コーチ**
> (3)　△AOB＝△AOC＋△BOC

8　右の図のように，関数$y = \frac{1}{2}x^2$のグラフ上に，x座標が-2である点Aがある。また四角形OABCが平行四辺形となるように，点Bと放物線上の点Cをとる。ABの中点Mがy軸上にあるとき，次の問いに答えなさい。〈福島〉



(1)　点Bのx座標を求めよ。

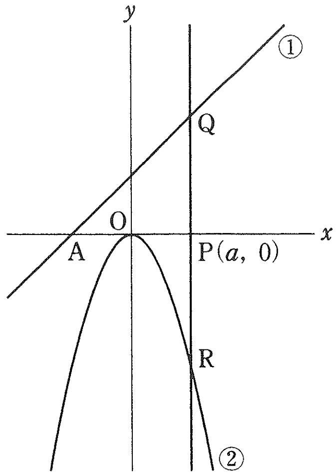
(2)　平行四辺形OABCの面積を求めよ。

(3)　Mを通る直線ℓによって，平行四辺形OABCを2つの部分に分ける。この2つの部分の面積の比が3：5となるようなℓの式をすべて求めよ。

> **コーチ**
> (BとAのx座標の差)
> ＝(CとOのx座標の差)
> (BとAのy座標の差)
> ＝(CとOのy座標の差)

発展問題

9　右の図のように，直線 $y=x+2$ ……①と放物線 $y=-x^2$ ……②がある。直線①と x 軸との交点をAとする。x 軸上の正の部分に点Pをとり，その点の座標を $(a,\ 0)$ とする。また，点Pを通り y 軸に平行な直線と直線①および放物線②との交点をそれぞれQ，Rとする。このとき，次の問いに答えなさい。〈宮崎〉



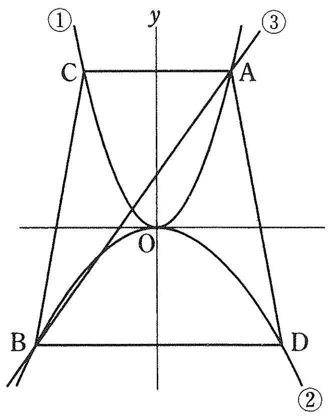
(1)　$a=1$ のとき，線分QRの長さを求めよ。

(2)　△ORQがOR＝OQの二等辺三角形になるとき，a の値を求めよ。

コーチ
PQ＝PRとなる。

(3)　(2)のとき，点Qを通り，△ORQの面積を2等分する直線の式を求めよ。

10　右の図で，①は放物線 $y=ax^2$，②は放物線 $y=bx^2$，③は直線 $y=2x+1$ のグラフである。①と③の交点のうち x 座標が正である点をA，②と③の交点のうち x 座標が小さいほうの点をBとする。点Cは①上の点，点Dは②上の点で，線分CA，BDは x 軸に平行である。次の問いに答えなさい。ただし，座標軸の単位の長さを1cmとする。〈青森〉

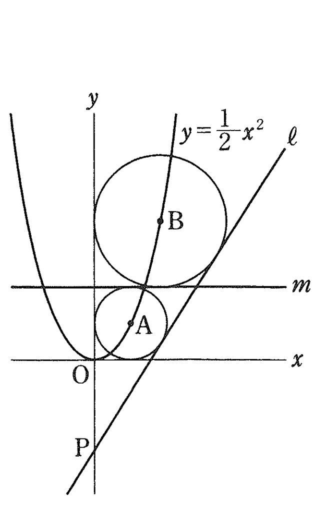


(1)　点Aの x 座標が1のとき，点Cの座標を求めよ。

(2)　関数 $y=ax^2$ について，x の変域が $-4 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域は $0 \leqq y \leqq 8$ となった。a の値を求めよ。

(3)　台形ACBDの面積が $\dfrac{81}{2}$ cm²，△ACBと△ABDの面積の比が1：2のとき，点Aの座標と b の値を求めよ。

11　図において，2つの円A，Bの中心はともに関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり，その中心の x 座標はともに正である。また，x 軸は円Aの接線であり，y 軸，直線 ℓ，x 軸に平行な直線 m は，それぞれ円A，Bの共通な接線である。このとき，次の問いに答えなさい。〈福島〉



(1)　小さい方の円の中心Aの座標を求めよ。

コーチ
点Aにおいて，
(x 座標)＝(y 座標)

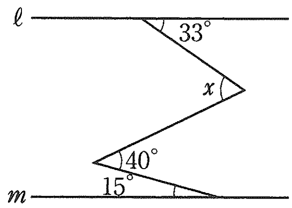
(2)　直線 ℓ と y 軸との交点Pの座標を求めよ。

5　平面図形(1)

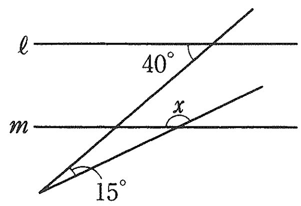
基本問題

1 **[平行線と角]**　次の図で，$\ell /\!/ m$ のとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

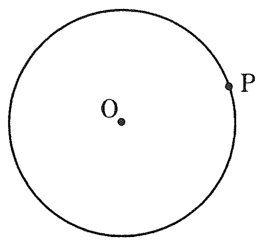
(1)　〈岐阜〉



(2)　〈長野〉

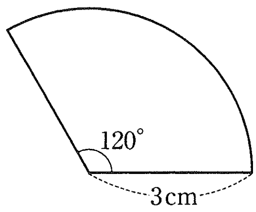


2 **[作図]**　右の図で，円Oの周上の点Pを通る，円Oの接線を作図しなさい。ただし，作図に用いた線は残しておくこと。　〈富山〉



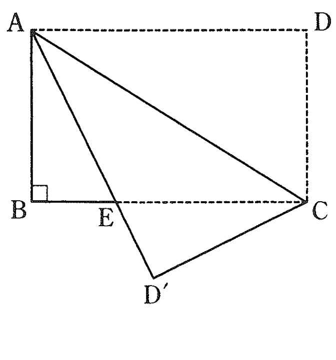
3 **[おうぎ形]**　次の問いに答えなさい。

(1)　右の図のような，半径3cm，中心角120°のおうぎ形の弧の長さを求めよ。　〈島根〉



(2)　半径が6 cm，中心角が80°のおうぎ形の面積を求めよ。　〈福島〉

4 **[三角形の合同]**　右の図のように，長方形ABCDを対角線ACを折り目として折り返したところ，点DはD′に移動した。AD′とBCの交点をEとして，△ABEと△CD′Eは合同であることを証明しなさい。　〈富山〉



要点チェック

1　平行な2直線に1つの直線が交わるとき，
①同位角は等しい。
②錯角は等しい。

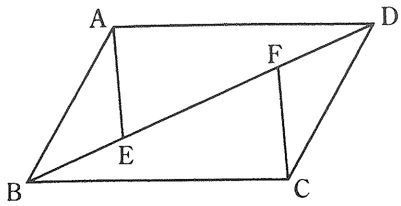
2　OP⊥(接線)であることに着目する。

3　おうぎ形の半径を $r$cm，中心角を a°，弧の長さを ℓ cm，面積を Scm^2 とすると，

- $\ell = 2\pi r \times \dfrac{a}{360}$
- $S = \pi r^2 \times \dfrac{a}{360}$

4　**三角形の合同条件**
①3辺がそれぞれ等しい。
②2辺とその間の角がそれぞれ等しい。
③1辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

5 ［**平行四辺形**］ 平行四辺形ABCDにおいて，対角線BD上に，BE = DFとなるように2点E，Fをとる。このとき，AE = CFとなることを次のように証明した。（　　）には適切なことばを，□にはあてはまる辺や角を書き入れて，証明を完成させなさい。〈富山〉



〔証明〕 △ABEと△CDFにおいて，

BE = DF　…仮定から
$\boxed{\text{ア}}$ = $\boxed{\text{イ}}$ …平行四辺形の（　ウ　）は等しいから
$\boxed{\text{エ}}$ = $\boxed{\text{オ}}$ …平行な2直線に1つの直線が交わるとき，
（　カ　）は等しいから

（　　キ　　）がそれぞれ等しいから，

△ABE ≡△CDF

合同な図形の対応する辺は等しいから，AE = CFである。

5　平行四辺形の性質

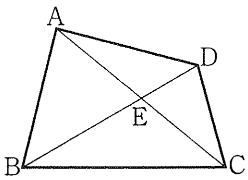
①2組の対辺はそれぞれ等しい。

②2組の対角はそれぞれ等しい。

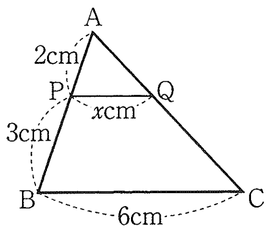
③対角線はそれぞれの中点で交わる。

6 ［**相似**］ 次の問いに答えなさい。

(1) 下の図の対角線の交点をEとする四角形ABCDにおいて，
∠BCA = ∠DCA，BA = BE
ならば，△ABC ∽ △EDCであることを証明せよ。〈鳥取〉



(2) 下の図で，PQ // BCのとき，xの値を求めよ。〈島根〉



(3) △ABCと△DEFは相似で，その相似比は2 : 3である。△ABCの面積が8cm^{2}であるとき，△DEFの面積は何cm^{2}か。〈香川〉

6 (1) **三角形の相似条件**

1 3組の辺の比がすべて等しい。

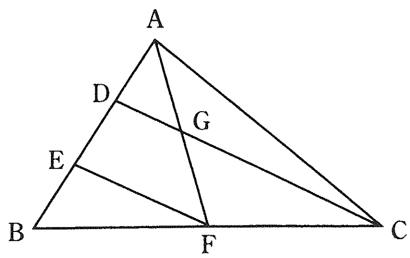
2 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。

3 2組の角がそれぞれ等しい。

(2) PQ // BCならば，
AP : AB = PQ : BC

(3) **相似比と面積比**
△ABCと△DEFの相似比がm : nのとき，面積比はm^2 : n^2

7 ［**中点連結定理**］ 右の図で，△ABCの辺ABを3等分した点を，点Aに近いほうから順にD，Eとし，辺BCの中点をFとする。また，線分AFと線分CDとの交点をGとする。
CD = 6cmであるとき，線分CGの長さを求めなさい。〈山形〉

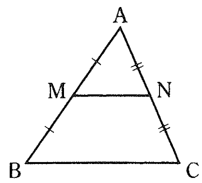


7　中点連結定理

M, Nがそれぞれ辺AB, ACの中点のとき，

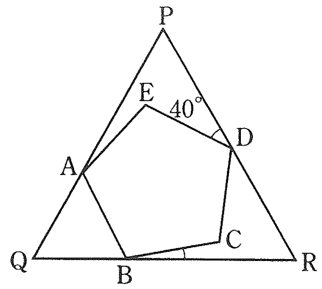
MN // BC

MN = $\frac{1}{2}$ BC

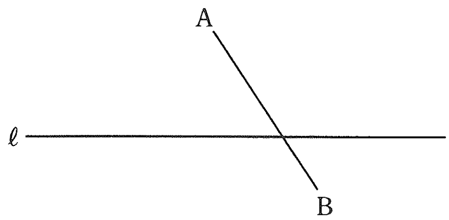


標準問題

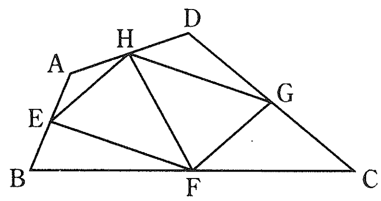
8　右の図のように，正五角形ABCDEの頂点A，B，Dが，それぞれ正三角形PQRの辺PQ，QR，RP上にある。∠PDE＝40°のとき，∠CBRの大きさを求めなさい。〈和歌山〉



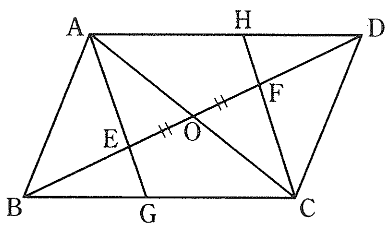
9　右の図のように，線分ABと直線ℓが交わっている。線分ABを対角線の1つとし，頂点の1つが直線ℓ上にあるひし形を作図しなさい。ただし，三角定規の角を利用して直線を引くことはしないものとする。〈千葉〉



10　右の図において，四角形ABCDの辺AB，BC，CD，DAの中点をそれぞれE，F，G，Hとするとき，△EFH≡△GHFであることを証明しなさい。〈茨城〉



11　右の図のように，平行四辺形ABCDがあり，対角線の交点をOとする。OE＝OFとなるように，2点E，Fをそれぞれ線分BO，OD上にとり，AEの延長と辺BCとの交点をG，CFの延長と辺ADとの交点をHとする。このとき，次の問いに答えなさい。〈富山〉



(1)　△AOE≡△COFを証明せよ。ただし，証明の中に根拠となることがらを必ず書くこと。

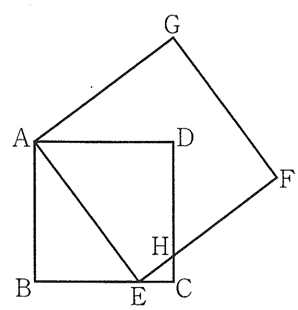
(2)　BE：EO＝3：2のとき，BG：GCを求めよ。

(3)　OF＝FD，△CDFの面積が12cm^2のとき，四角形AOFHの面積を求めよ。

12　右の図のように，正方形ABCDの辺BC上に点Eをとり，AEを1辺とする正方形AEFGをつくる。辺CDと辺EFの交点をHとすると，△ABE∽△ECHである。このとき，次の問いに答えなさい。〈栃木〉

(1)　△ABE∽△ECHであることを証明せよ。

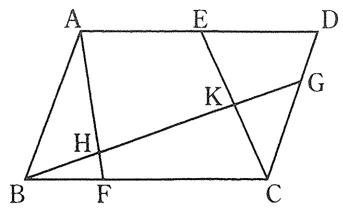
(2)　AB＝5cm，BE＝4cmのとき，DHの長さを求めよ。



発展問題

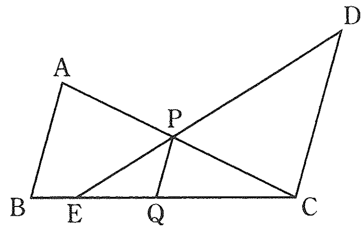
13 図で，四角形 ABCD は平行四辺形で，E は辺 AD の中点である。F，G はそれぞれ辺 BC，DC 上の点で，BF $=\frac{1}{2}$ FC，DG $=\frac{1}{2}$ GC である。また，H は線分 AF と GB との交点，K は線分 EC と GB との交点である。

このとき，線分 KH の長さは線分 GB の長さの何倍ですか。　〈愛知〉

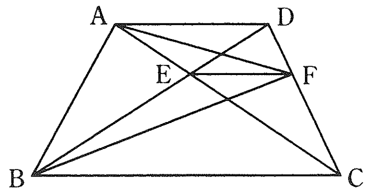


14 右の図で，AB//PQ//DC，AB = 6 cm，DC = 8 cm，BE = 2 cm，EC = 10 cm のとき，PQ の長さを求めなさい。　〈青森〉

コーチ
E から辺 AB に平行な直線をひいて考える。



15 図のような，AD//BC，AD = 3 cm，BC = 6 cm の台形 ABCD がある。対角線 AC，BD の交点を E とし，E を通り，BC に平行な直線と辺 CD との交点を F とする。次の問いに答えなさい。　〈長野〉

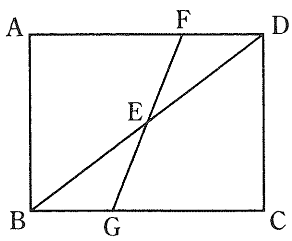


(1) EF の長さを求めよ。

(2) △AEF の面積と△EBF の面積の和は，台形 ABCD の面積の何倍か。

コーチ
△AEF = △DEF
△EBF = △ECF

16 右の図のように，長方形 ABCD があり，対角線 BD の中点を E とする。辺 AD 上に，2 点 A，D と異なる点 F をとり，2 点 E，F を通る直線と辺 BC との交点を G とする。このとき，次の問いに答えなさい。　〈香川〉



(1) BG = DF であることを証明せよ。

(2) 点 G を通り，対角線 BD と平行な直線をひき，辺 CD との交点を H とする。点 F と点 H を結ぶとき，FH + GH = BD であることを証明せよ。

解　答　〈W中3数学A〉

1 数と式の計算

p.2〜3 ●基本問題

1 (1) 2　(2) -5
(3) 5　(4) $\frac{5}{6}$

2 (1) $9a+2$　(2) $4b$
(3) $4a^2$　(4) a^3b^2
(5) $\frac{7x-2}{6}$　(6) $-2x+\frac{7}{2}$

3 (1) $-3x+2y$　(2) $3x^2-5x-2$
(3) a^2-25　(4) $2x^2-1$

4 (1) $(x+4)(x-3)$
(2) $(x-3y)(x+2y)$
(3) $\left(a+\frac{3}{2}\right)^2$
(4) $(a+b+1)(a-b-1)$

5 (1) $a=5,\ 6,\ 7,\ 8$
(2) $n=6$

6 (1) $\sqrt{2}$　(2) $5\sqrt{3}$
(3) $4\sqrt{2}$　(4) $3\sqrt{5}-\sqrt{2}$
(5) $3\sqrt{2}$　(6) $9+6\sqrt{2}$

7 (1) $y=2x-5$　(2) $a=-3b+4c$

8 (1) 4　(2) $8\sqrt{5}$

9 もとの整数は$10a+b$，入れかえた整数は$10b+a$と表されるから，
$$(10a+b)+(10b+a)=11a+11b=11(a+b)$$
$a+b$は整数だから，$11(a+b)$は11の倍数になる。

解説

5 (1) それぞれの数を2乗して，
$2^2<a<3^2$より，$4<a<9$
(2) $24n=2^3\times3\times n$より，$n=2\times3=6$

6 (3) 与式$=\frac{\sqrt{24}\times2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\sqrt{4}\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$
(4) 与式$=2\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}-\sqrt{2}$
(5) 与式$=5\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$
(6) 与式$=6+2\sqrt{6}\times\sqrt{3}+3=9+6\sqrt{2}$

8 (1) 与式$=6a-3-a+5=5a+2$
$=5\times\frac{2}{5}+2=2+2=4$
(2) 与式$=(x+y)(x-y)$
$=\{(\sqrt{5}+2)+(\sqrt{5}-2)\}\{(\sqrt{5}+2)-(\sqrt{5}-2)\}$
$=2\sqrt{5}\times4=8\sqrt{5}$

p.4 ●標準問題

10 (1) -5　(2) $x-10$
(3) $-4ab$　(4) $\frac{3}{4}x$
(5) $4x+9$　(6) $2x^2-7y^2$

11 (1) $\sqrt{2}$　(2) $2\sqrt{2}$
(3) $13-4\sqrt{3}$　(4) $1-\sqrt{7}$

12 (1) $3(2x+y)(2x-y)$
(2) $(a+6)(a+7)$

13 (1) -3　(2) 4000
(3) $2\sqrt{6}<5<\sqrt{26}$　(4) 11点

解説

11 (1) 与式$=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=\sqrt{2}$
(2) 与式$=6\sqrt{2}-4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$
(3) 与式$=12-4\sqrt{3}+1=13-4\sqrt{3}$
(4) 与式$=7+\sqrt{7}-6-2\sqrt{7}=1-\sqrt{7}$

12 (2) 与式$=(a+7)^2-(a+7)$
$=(a+7)(a+7-1)$
$=(a+7)(a+6)$

13 (2) 与式$=(1001+999)\times(1001-999)$
$=2000\times2=4000$

p.5 ●発展問題

14 (1) 3　(2) $-\frac{1}{6}$
(3) $-3x$　(4) $\frac{5x-y}{12}$
(5) $6-\sqrt{5}$　(6) $2\sqrt{5}$

15 (1) $(x+1)(x-7)$
(2) $(a+1)(b-1)$

16 (1) エ　(2) $a=84,\ b=112$

17 真ん中の数をaとすると，最も大きい数は右下の数で$a+3$，最も小さい数は左上の数で$a-3$と表せる。これより，
$$a(a+3)-(a-3)^2=a^2+3a-a^2+6a-9=9a-9=9(a-1)$$
$a-1$は整数だから，$9(a-1)$は9でわり切れる。